§2 解析函数

§2.1 解析函数及C-R条件

一. 复变函数可导与可微

1. 有关定义

Def 1. 设 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内有定义，记 $\Delta z = z - z_0$，

$\Delta w = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. 若 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ 存在，

则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，记为在 z_0 处的导数，

记 $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Def 2. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导，也称 $f(z)$ 在 z_0 可微，且微分

$$dw = f'(z_0)\Delta z \xlongequal{\text{记为}} f'(z_0)\,dz$$

Thm. $f(z)$ 在 z_0 可微（可导）$\Longleftrightarrow \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$

Pf. $$\frac{\Delta w}{\Delta z} \to f'(z_0) \Longleftrightarrow \Delta w = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z$$
$$\Longleftrightarrow \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

Rem. $o(|\Delta z|) = o(\Delta z)$

2. 求导运算法则

与实函数求导法则类似：复变函数的导数也有四则运算及复合函数求导法则.

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$$
$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

例1 证明 $f(z)=z^n$ 在 z 平面上处处可导，且 $f'(z)=nz^{n-1}$

Pf. $\forall z$, $\Delta w = f(z+\Delta z)-f(z)$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{C_n^0 z^n+C_n^1 z^{n-1}\Delta z+\cdots+C_n^n\Delta z^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=C_n^1 z^{n-1}$$

即 $(z^n)'=nz^{n-1}$

例2 证明 $f(z)=\bar{z}$ 在全平面上处处不可导

Pf. $\forall z$, $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}$$

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 不存在（与路径有关）

二、解析函数定义

1. 有关定义

Def 1. 若 $f(z)$ 在区域 D 上处处可导，则称 $f(z)$ 在区域 D 上解析，也称 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数.

例如，$f(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在复平面上解析.

$f(z)=\bar{z}$ 不解析（任何区域上）

Def 2. $f(z)$ 在一点 z_0 解析：若 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内处处可导，则称 $f(z_0)$ 在 z_0 解析.

2. Rem. (1) $f(z)$ 在 D 上解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 D 上任一点解析

(2) $f(z)$ 在 z_0 点解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 z_0 的某邻域处处解析

(3) $f(z)$ 在 z_0 可导 $\neq$ $f(z)$ 在 z_0 解析

(4) $f(z)$ 在 z_0 不解析但在 z_0 任意邻域均存在解析点：奇点

例如，$f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $z\neq 0$ 都解析，$z=0$ 是奇点。

三、可导函数与 C-R 条件

考虑 $f(z)=u(x,y)+i(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 可导微与 u,v 在 z_0 可微的关系

Thm 1. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 可微 $\Leftrightarrow$ $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 都可微，且满足 C-R 方程：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

Pf. $\Rightarrow$：$f(z)$ 在 z_0 可微 $\Rightarrow f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\Leftrightarrow \Delta w=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|)$

这里 $\Delta w=\Delta u+i\Delta v$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，$o(|\Delta z|)=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$

记 $f'(z_0)=a+ib$

代入得，$\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2$

比较两边得，
$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\varepsilon_1$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\varepsilon_2$$

以上满足 u,v 在 (x_0,y_0) 可微的定义

根据可微定义有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。

$\Leftarrow$：u,v 满足在 (x_0,y_0) 可微且有 C-R 方程，

记 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b$

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)$$
$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v=(a\Delta x-b\Delta y)+i(b\Delta x+a\Delta y)+o(|\Delta z|)$$
$$=(a+ib)\cdot(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)$$
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left[(a+ib)+\frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}\right]=a+ib$$

Cor. (1) $f(z)$ 可导，则 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Thm 2. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在D上解析 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在D上可微，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

Pf. 略

Rem. 判断复变函数可微的方法：(1) 求导定义

(2) 定理1

例3 证明 $f(z)=z|z|$ 在全平面上处处不解析.

Pf. (1) 在 $z=0$ 处，$f'(0)=\lim\limits_{z\to0}\frac{z|z|-0}{z}=0$.

(2) 当 $z=x+iy\neq0$ 时，

$f(z)=z|z|=(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}$，$u=x\sqrt{x^2+y^2}$，$v=y\sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

由C-R条件：　$x^2=y^2$，$xy=-xy$

综上，当 $z=x+iy\neq0$ 时，u 与 v 处处不满足C-R条件

故处处不可微，$f(z)=z|z|$ 在复平面上不解析

Rem. $f(z)=z|z|$ 在 $z=0$ 处可微，但不解析.

四. 调和函数与解析函数的关系

Thm. (后证)

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D上解析 $\Leftrightarrow$

$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在D上有任意阶连续偏导数，且满足C-R条件.

~~Cor.~~

Def1. 若 $u(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数，且满足 L 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则称 u 是 D 上的调和函数.

Cor. 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 上解析，则 v 与 u 都是调和函数.

Pf. 由 Thm 2.，u, v 满足 C-R 条件：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

则 $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\end{cases}$

相加得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，表明 $u(x,y)$ 是 D 上的调和函数

同理可证 $v(x,y)$.

Def 2. 若 u 与 v 在 D 上有一阶连续偏导数，且满足 C-R 条件，则称 u 与 v 是一对共轭调和函数.

Rem. 解析函数的实.虚部函数满足 C-R 条件，表示两者存在一定关联.

例 4 已知 $u=e^x\cos y$，求 v 使 $f(z)=u+iv$ 解析.

Sol. $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$v=e^x\sin y+C(x)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$，$C'(x)=0$，即 $v=e^x\sin y+C$.

$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y+iC=e^z+iC$，$C\in\mathbb{R}$

且 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z$